Contrainte et déformation finie (rappels)

MÉCANIQUE DES ROCHES ET OUVRAGES SOUTERRAINS

Laboratoire de Mécanique des Roches – LEMR

Prof. M. VIOLAY

Milieu continu

- Milieu continu: milieu dont les propriétés caractéristiques qui nous intéressent sont continues. Une telle hypothèse permet d'avoir recours aux outils mathématiques reposant sur les fonctions continues et /ou dérivables.
- Loi de Newton (mouvements)
  - Première loi de newton: Si un objet est au repos ou que son mouvement est rectiligne uniforme, alors la somme des forces extérieures qui s'exercent sur lui est nulle, et réciproquement.
  - Deuxième loi de Newton: Le vecteur résultant de la somme des forces extérieures qui s'exercent sur le solide est colinéaire au vecteur accélération et ce quelque soit le mouvement de l'objet. Le coefficient de colinéarité correspond à la masse de l'objet.
  - Troisième loi de Newton: Si un objet A exerce une force sur un objet B, alors cet objet B exerce une force sur A de même direction, de même intensité, mais de sens opposé. C'est le principe des actions réciproques.
- Force : Vecteur : direction, sens, norme
- En Coordonnées X, Y, Z
- Unité: $F=m\vec{a}$ =[M.L.T^{-2}]=[N]

$$F = \begin{vmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{vmatrix}$$

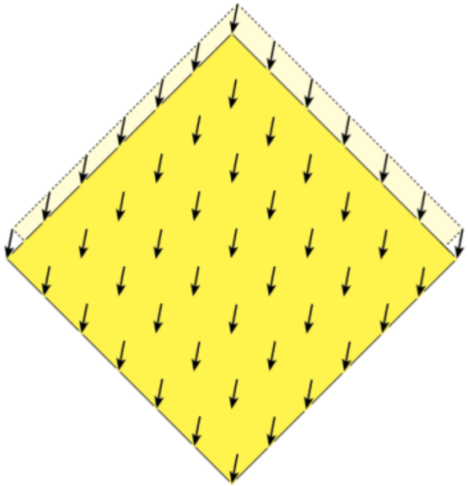
Type de force

- Forces :
  - Gravité (force la plus importante dans la terre)
  - Forces tectoniques
  - Forces liées aux activités anthropiques (Génie civil)

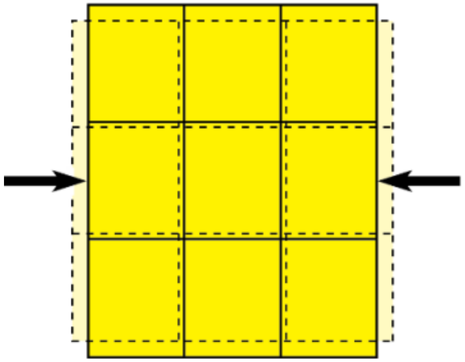
Volume *vs* Surface

- Force de volume (gravité, électromagnétique, etc.)
- Force de surface (friction, compression, ...) (transmise dans le milieu continu)

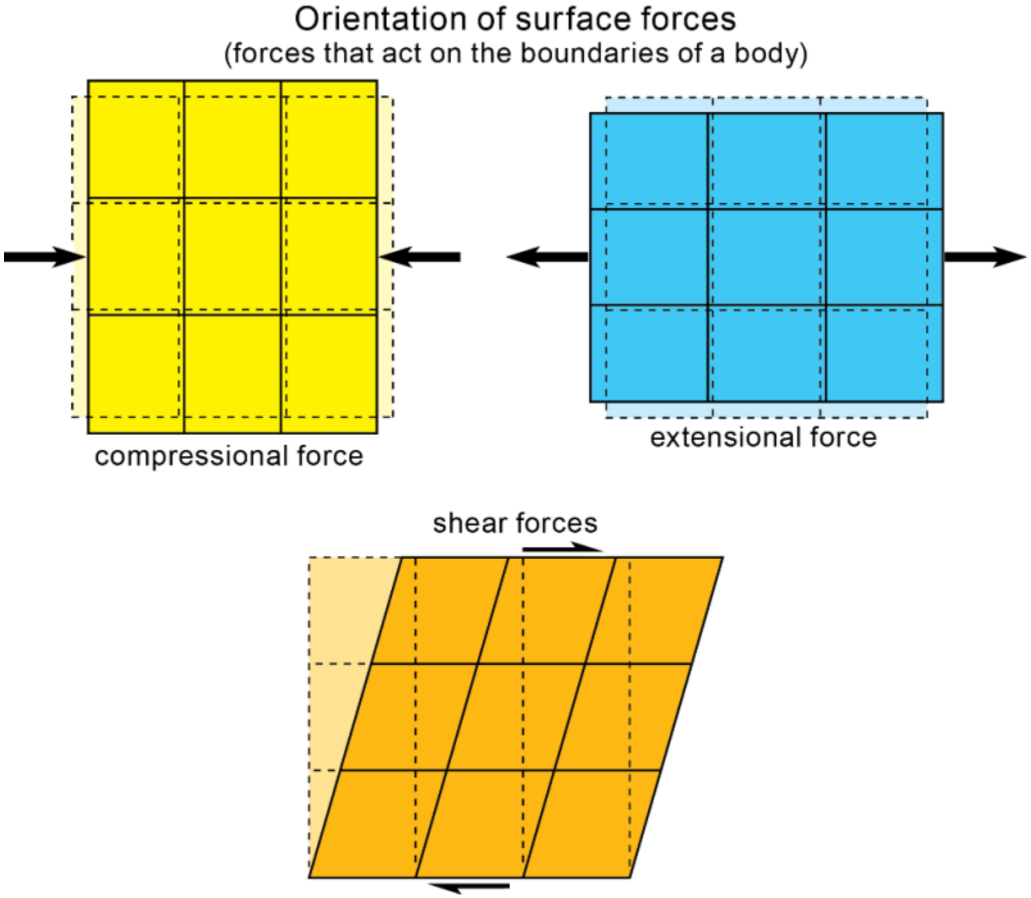
volume



surface



Orientations



Force normale et cisaillante

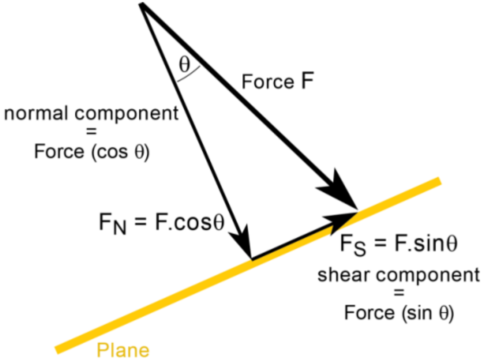
- Force normale et cisaillante

$$\vec{F} = \overrightarrow{F_N} + \overrightarrow{F_S}$$

$$F_N = F\cos(\theta)$$

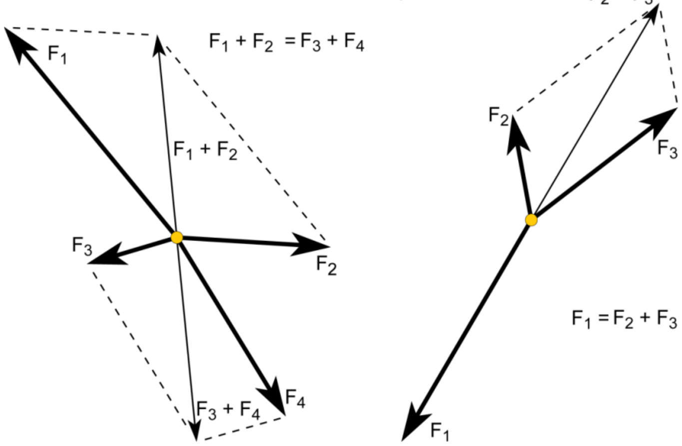
$$F_S = F\sin(\theta)$$

- Equilibre statique



Vectorial decomposition of a force applied to a plane into its normal- and shear components

Conditions of static equilibrium



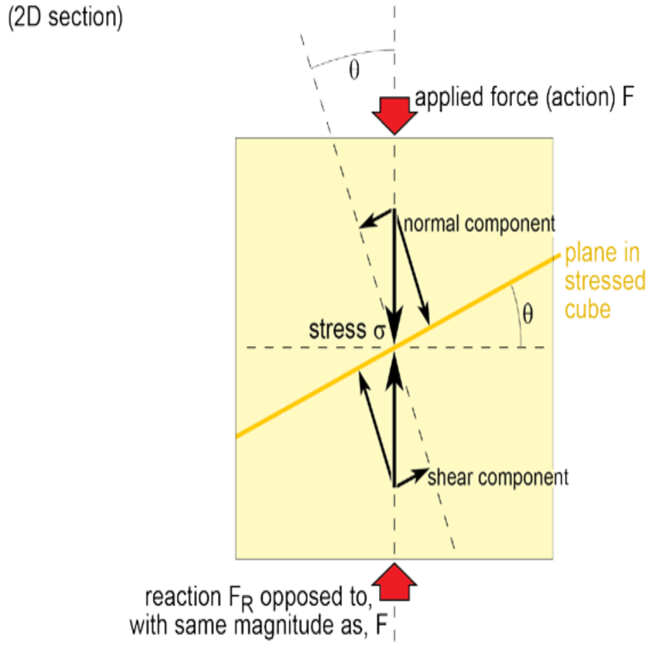
Two opposed forces of same magnitude act on an element of mass

Traction/Contrainte

- Force permettant la déformation ↗️ quand l'aire (A) du cube↗️
- Pratique de définir les forces permettant la déformation pour (A)→0
- Traction: F/A ou plus précisément

$$\vec{T} = lim_{\Delta A \to 0} \left(\frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}\right) = \frac{dF}{dA}$$

- $\Delta \vec{F}$
  - Intensité
  - Orientation
  - Orientation du plan A ou $\vec{F}$ est appliquée

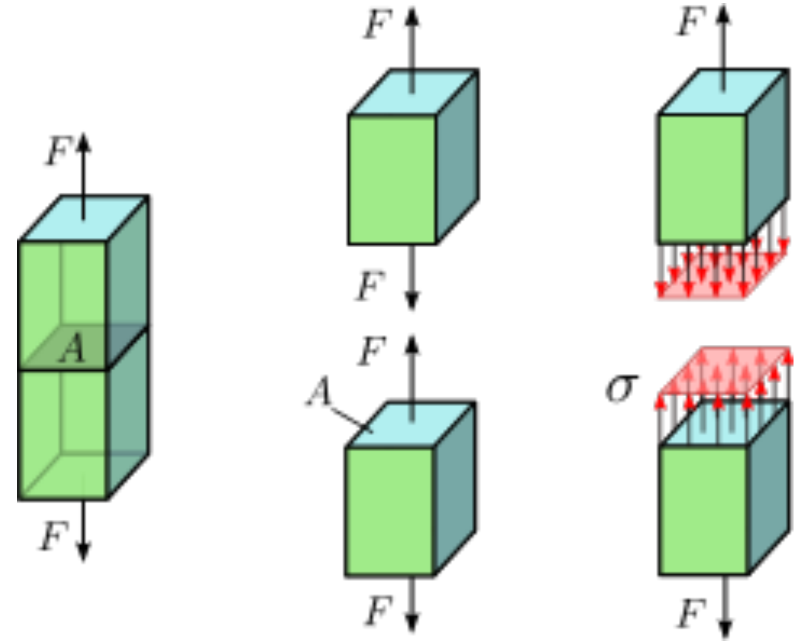


Stress (a pair of equal and opposite vectors) induced at a point of an inclined plane within a body subjected to uniaxial compression

Contrainte = Paire de forces égales et opposées (Newton 3ème loi) appliquées à l'aire A (transmis au solide par la force interatomique)

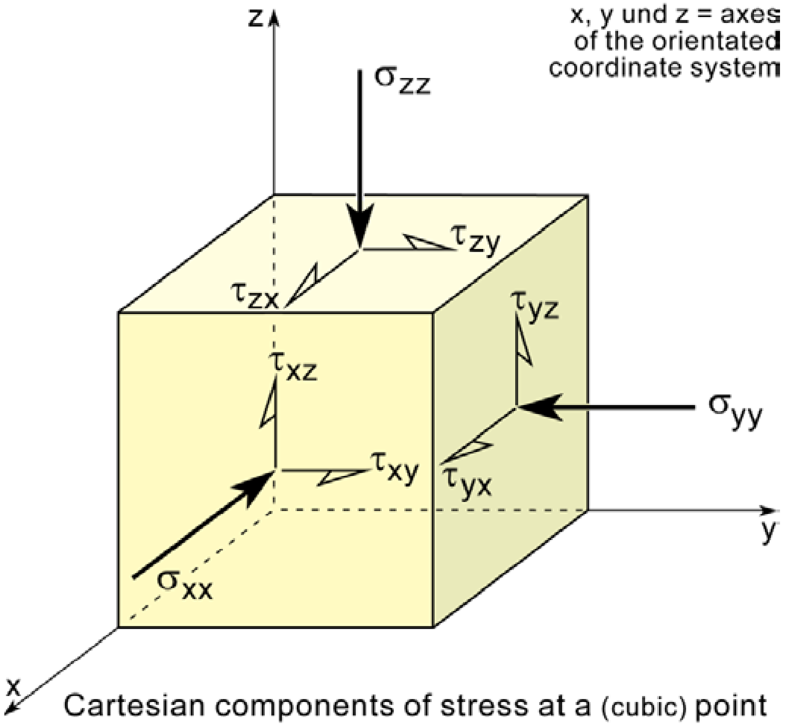
Contrainte (unité)

- Contrainte, pression = $[M*LT^{-2}]/[L^2]=[M*L^{-1}*T^{-2}]$
- Comme Force= $[M.L.T^{-2}]=N$
  - $1N/m^2 = 1Pa$
  - 1 bar $=10^{-5}$Pa ~1 atmosphère
  - Souvent on utilise le MPa= 10^6 Pa



Contrainte (composantes)

- Force de surface > force de volume
- Contrainte **normale**: perpendiculaire aux faces du cube : σ
- Contrainte **cisaillante**: Parallèle aux faces du cube : τ



Cartesian components of stress at a (cubic) point resolved into normal- (σ) and schear- (τ) stress components
Note that only stresses applied to the external sides of the cube are drawn. Stresses on the opposite sides of the cube should also be represented and all stresses should be pointing to the central point within the cube.

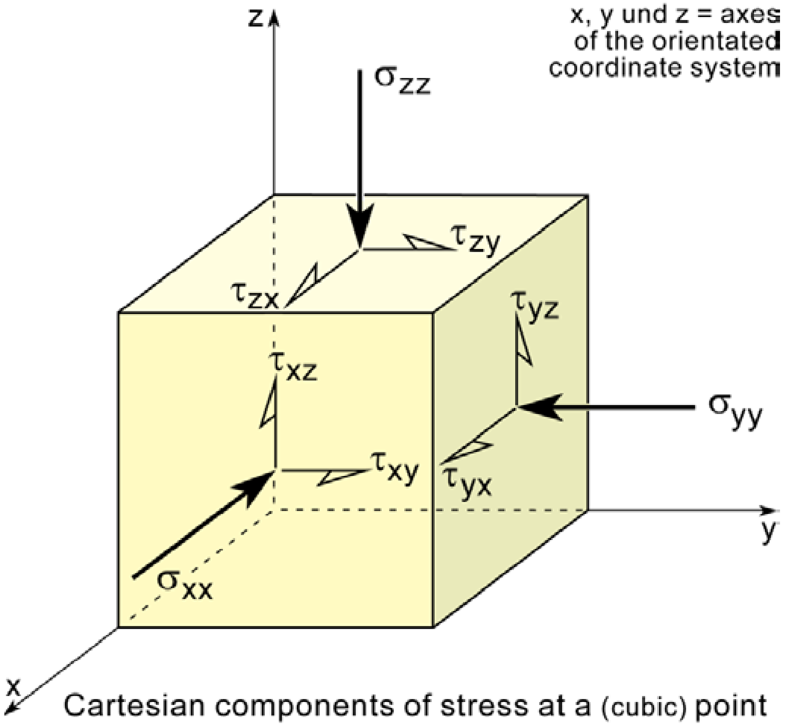
Tenseur de contrainte

- $\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$

"Perpendiculaire" parallèle

Sur la face

- $\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$



Cartesian components of stress at a (cubic) point resolved into normal- (σ) and schear- (τ) stress components

Note that only stresses applied to the external sides of the cube are drawn. Stresses on the opposite sides of the cube should also be represented and all stresses should be pointing to the central point within the cube.

Tenseur de contrainte

- $$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

  - $\sigma_{12}=\sigma_{21}$
  - $\sigma_{13}=\sigma_{31}$
  - $\sigma_{23}=\sigma_{32}$

6 composants indépendants

Contrainte normale: σ_{11}, σ_{22}, σ_{33}
Contrainte cisaillante σ_{12}, σ_{23}, σ_{13}

Contraintes principales

- $\sigma_{12} = \sigma_{23} = \sigma_{13} = 0$
- $$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

Contraintes principales

- Par convention on note $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ avec $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$
- Par convention, tension = -
- Par convention, compression = +

Attention: Inverse en mécanique des matériaux

État des contraintes

- $\sigma_1 = \sigma_2 = 0,\ \sigma_3 < 0;$ Uniaxiale tension
- $\sigma_2 = \sigma_3 = 0,\ \sigma_1 > 0;$ Uniaxiale compression
- $\sigma_2 = 0;$ Biaxiale stress
- $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3;$ Tri-axiale stress
- $\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3;$ Contraintes hydrostatiques
- $P < 0;$ Tension hydrostatique

Pression lithostatique

- Pression lithostatique ≠ pression hydrostatique
- Si état des contraintes n'est pas homogène

$$\sigma_{1ou3} \approx \int_0^z \rho g . dz$$

Avec z la profondeur et ρ la densité

$$\sigma_2 = \sigma_3 = [v/(1-v)]$$

Avec v le coefficient de Poisson

- En géologie σ_1 est souvent la contrainte verticale (poids des roches).
- En géothechnique σ_1 est souvent la contrainte horizontale.

Contrainte moyenne/déviatorique/différentielle

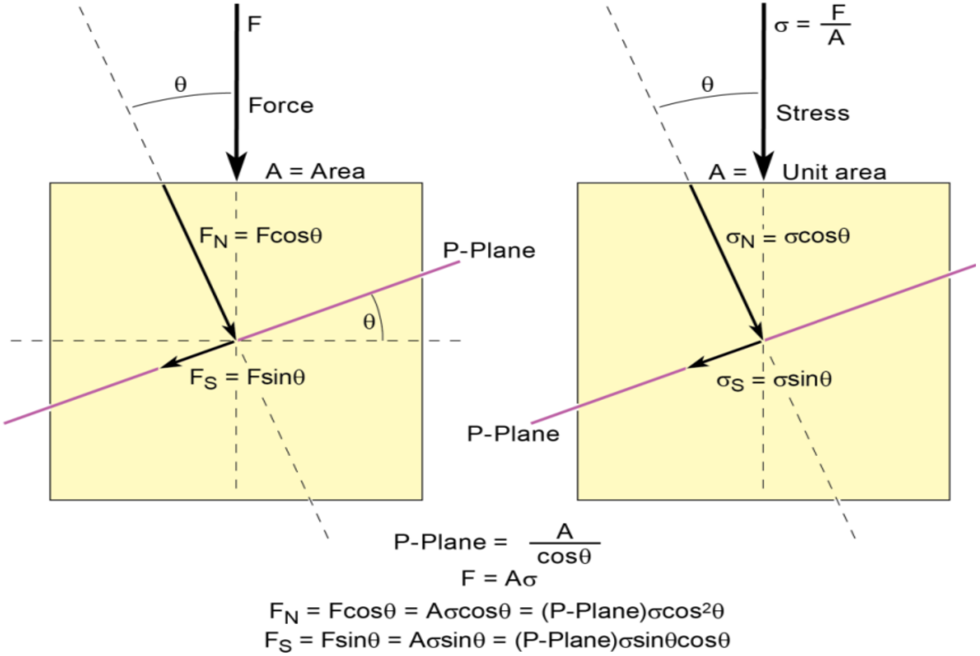
- Contrainte moyenne $=\bar{\sigma}= (\sigma_{1+}\sigma_{2+}\sigma_{3})/3$

- $$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} S_1 & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & S_2 & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & S_3 \end{bmatrix}}_{\text{Contrainte déviatorique}}$$

- Contraintes cisaillantes sont tjs déviatoriques

Contrainte appliquée sur un plan-P

- $FN = F \cos\theta$
- $Fs = F \sin\theta$
- $Pp = A/\cos\theta$
- $\sigma = F/A$
- $\sigma N = FN/Pp = (F/A) \cos^2\theta$
- $\sigma S = FS/Pp = (F/A) \sin\theta\cos\theta$



Contrainte appliquée sur un plan-P (en 2D)

2 hypothèses :

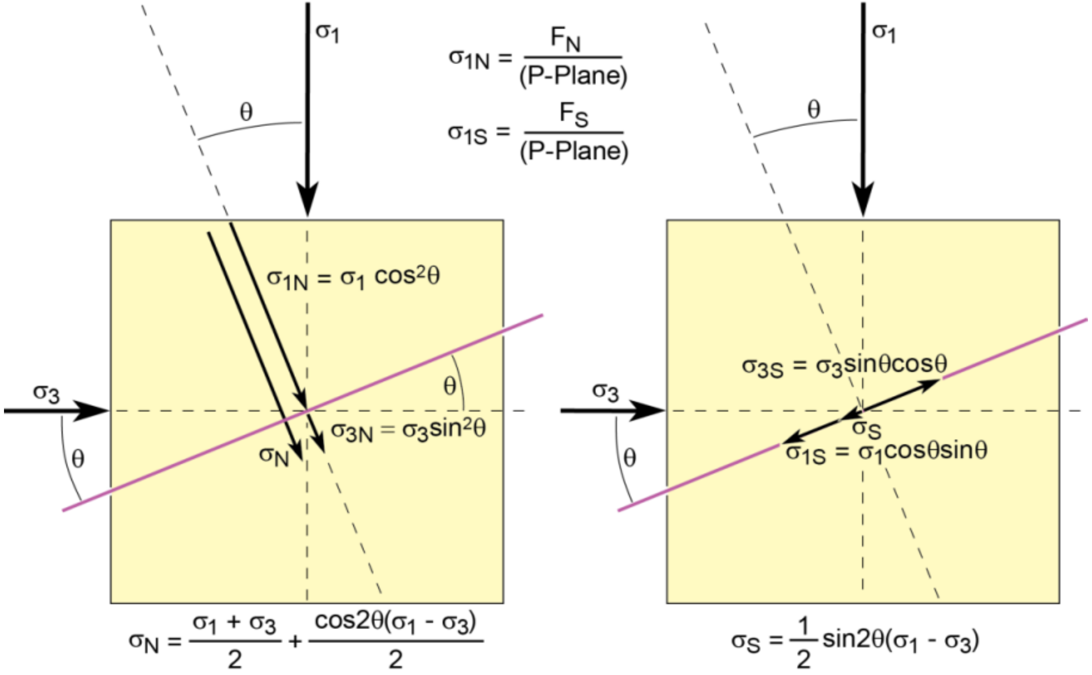
- σ_2 // plan P // x
- σ_2 ignoré

⇛

- $\sigma_{1N}=\sigma_1 \cos^2\theta$
- $\sigma_{1S}=\sigma_1 \sin\theta\cos\theta$
- $\sigma_{3N}=\sigma_3 \sin^2\theta$
- $\sigma_{3S}=-\sigma_3 \sin\theta\cos\theta$

⇛

- Sur le plan P
- $\sigma_N=\sigma_1 \cos^2\theta+ \sigma_3 \sin^2\theta$
- $\sigma_S= \sin\theta\cos\theta(\sigma_1 - \sigma_3)$



Prof. M. VIOLAY

Contrainte appliquée sur un plan-P (en 2D)

On sait que:

$$\cos^2\theta = \frac{\cos(2\theta) + 1}{2}$$

$$\sin^2\theta = \frac{1 - \cos(2\theta)}{2}$$

$$\sin(2\theta) = 2\sin(\theta)\cos(\theta)$$

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma_N &= \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2} + \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)\cos 2\theta}{2} \\ \sigma_s &= \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)\sin 2\theta}{2}\end{aligned}}$$

Note σ_s est maximum quand

$\sin 2\theta = 1, \Rightarrow \theta = 45°$

Cercle de Mohr

- **Rappel**: On parle de contraintes principales quand les contraintes cisaillantes sont nulles.
- Si les contraintes cisaillantes ne sont pas nulles, les contraintes normales et cisaillantes changent avec l'angle θ.
- Comment varient σ_N et σ_S avec θ?
- On réarrange l'équation (mise au carré) :

- $$\left[\sigma_N - \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2}\right]^2 = \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)\cos 2\theta}{2}\right]^2$$
- $$\sigma_s^2 = \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)\sin 2\theta}{2}\right]^2$$
- $$\left[\sigma_N - \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2}\right]^2 + \sigma_s^2 = \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)\cos 2\theta}{2}\right]^2 + \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)\sin 2\theta}{2}\right]^2$$

- $$\left[\sigma_N - \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2}\right]^2 + \sigma_s^2 = \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}\right]^2$$ **Equation d'un cercle**

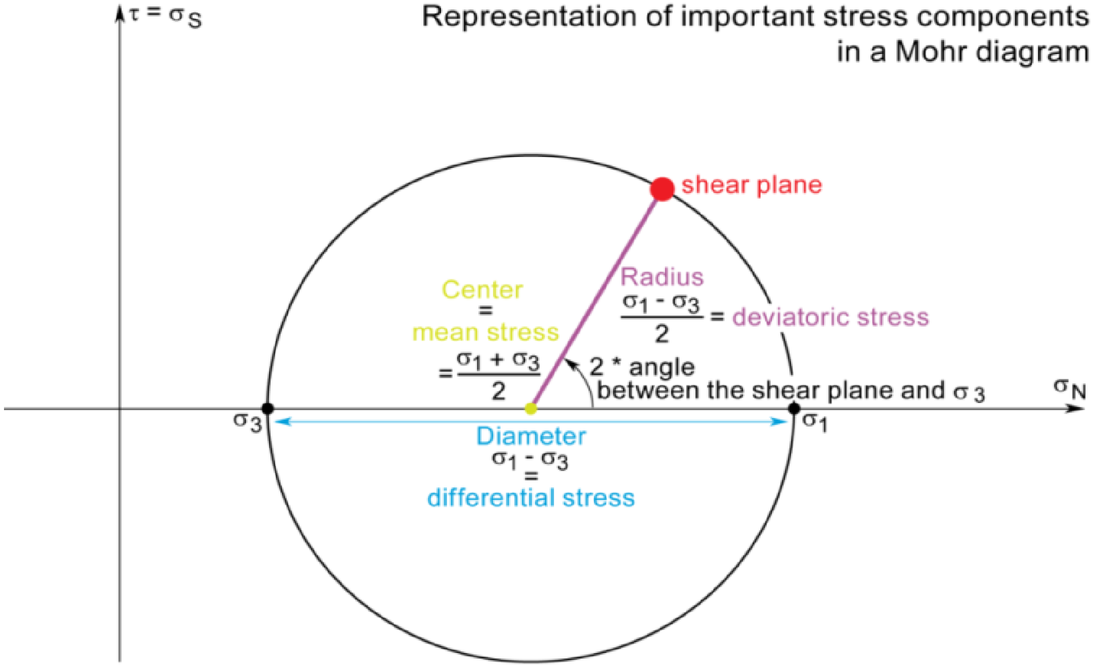
Cercle de Mohr

$$\left[\sigma_N - \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2}\right]^2 + \sigma_s^2 = \left[\frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}\right]^2$$

$$\text{Rayon} = \frac{(\sigma_1 - \sigma_3)}{2}$$

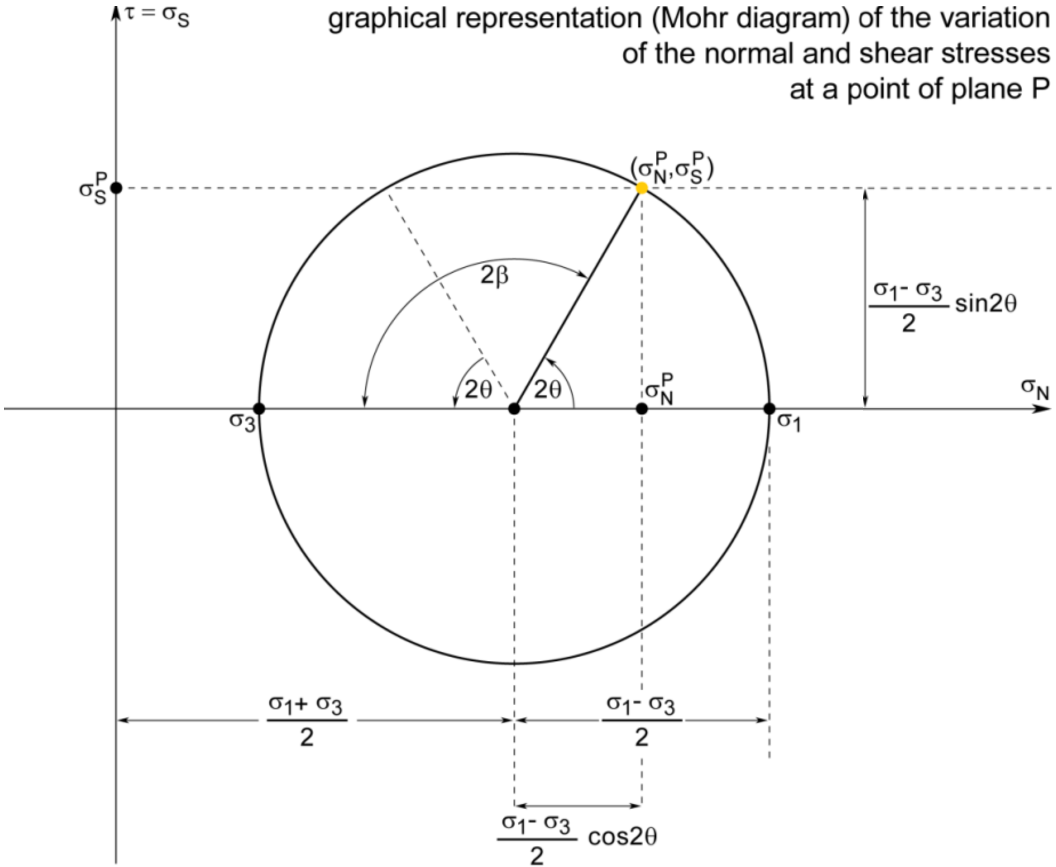
$$\text{Centre} = \frac{(\sigma_1 + \sigma_3)}{2}$$

Representation of important stress components in a Mohr diagram

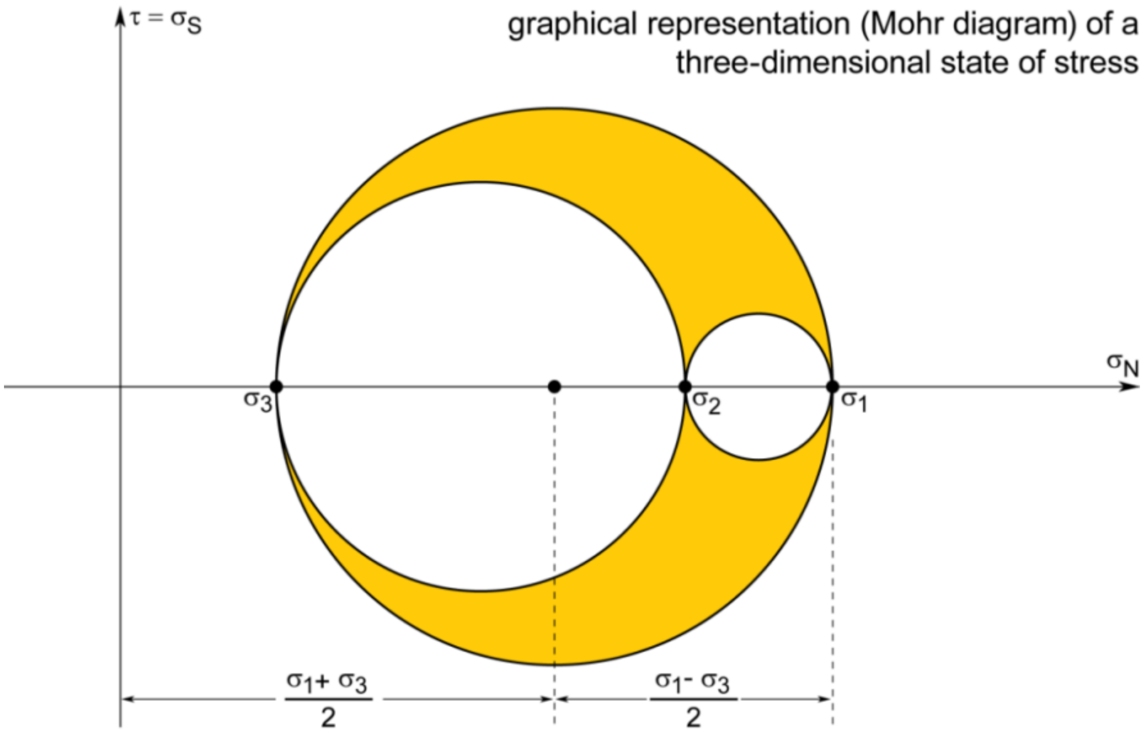


mean stress = hydrostativ component, responsible for volume changes.
deviatoric stress = non-hydrostatic component, responsible for deformation.
differential stress = the larger it is, the bigger is the deformation potential.

Cercle de Mohr en 2D



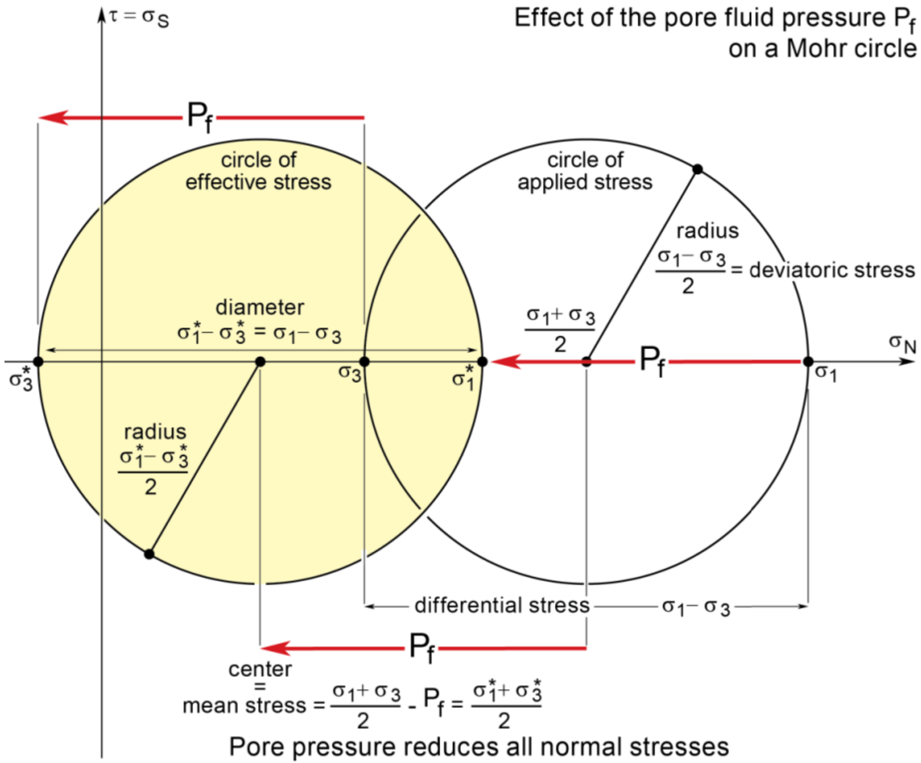
Cercle de Mohr en 3D



Effet de la pression de pore

- Pf = ρ(f)gz
- Pf peut être < mais très souvent > ρ(f)gz
  - Compaction des sédiments
  - Déshydratation des minéraux
  - Contraintes tectoniques
  - Pf= $\begin{bmatrix} Pf_1 & 0 & 0 \\ 0 & Pf_2 & 0 \\ 0 & 0 & Pf_3 \end{bmatrix}$ (fluide ne supporte pas les contraintes cisaillantes)
  - Contraintes effectives = $\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$-$\begin{bmatrix} P & 0 & 0 \\ 0 & P & 0 \\ 0 & 0 & P \end{bmatrix}$
- $\boxed{\sigma^{tot}= \sigma^{eff}+PF}$

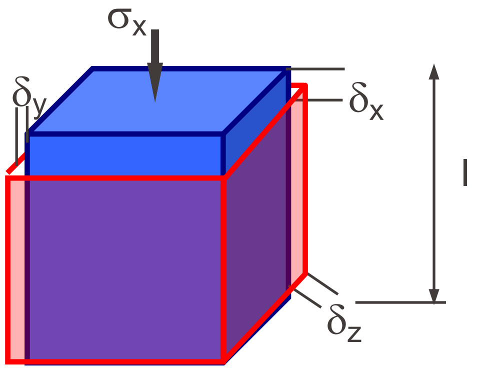
Effet de la pression de pore



$$\text{Note que la contrainte moyenne} = \frac{(\sigma 1 + \sigma 3\ )}{2} - Pf$$

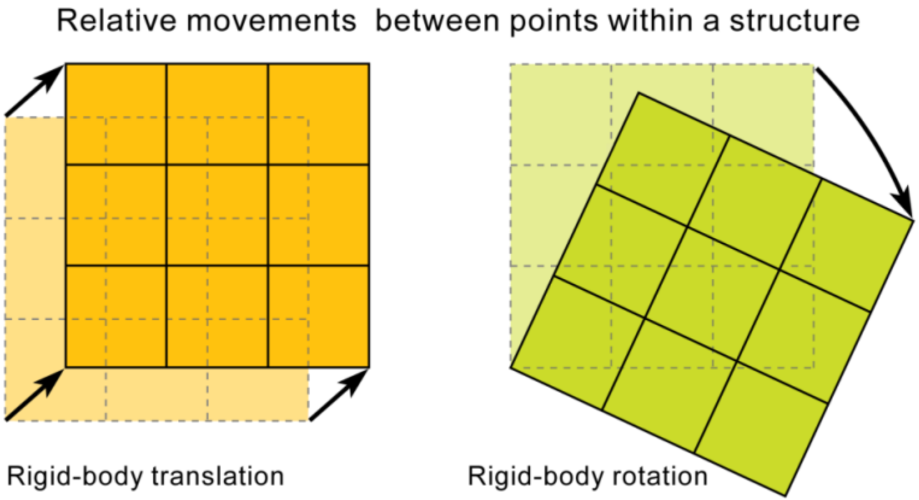
Déformations

- Les déformations sont des déplacements par unité de longueur causées par les contraintes.

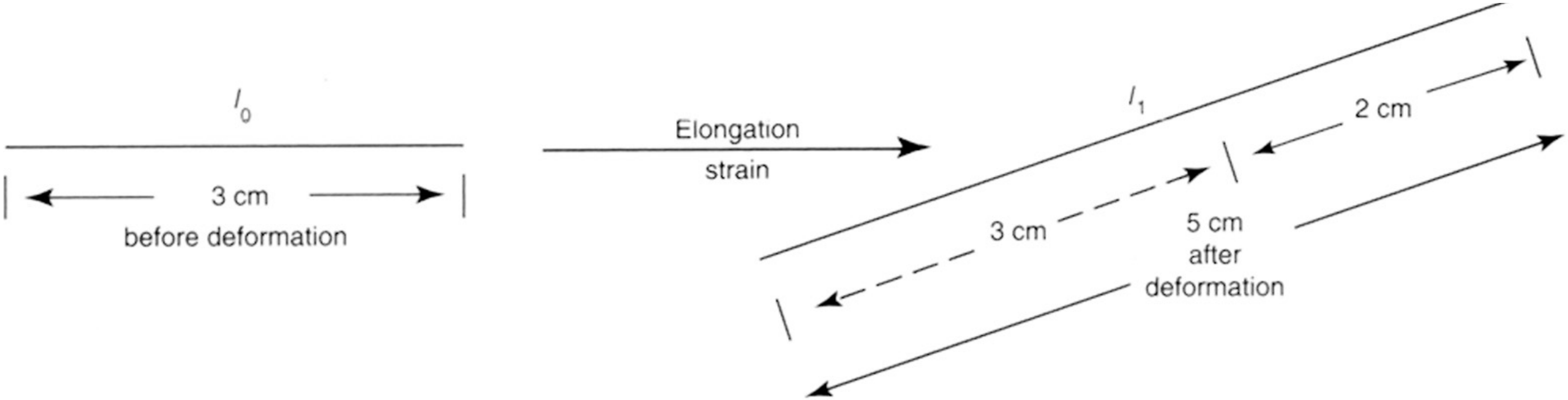


Force et déformation

- **Mécanique**: étude des effets des forces sur un corps
- **Corps soumis à des forces externes**: translation, rotation, changement de forme
- **Déformation rigide**: rotation, translation (forme et taille originales)



Mesure des déformations

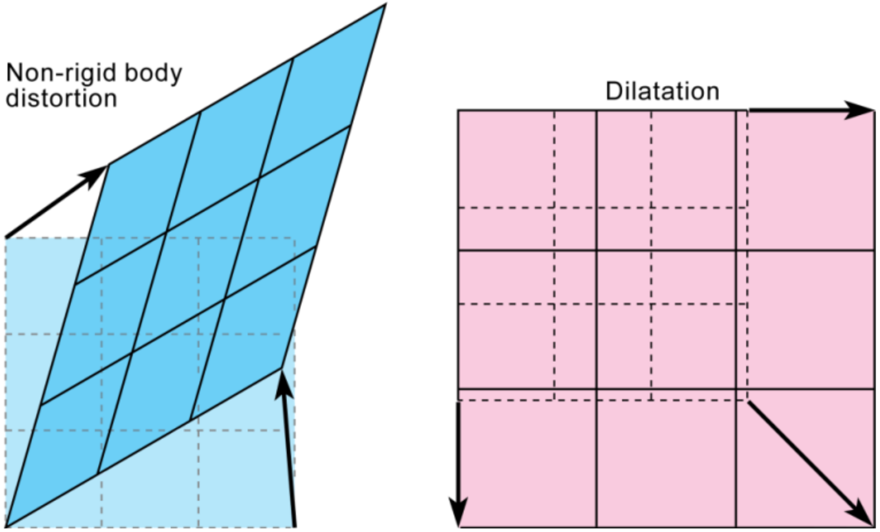


Déformation? $\varepsilon = (l_1 - l_0)/l_0 = (5\text{-}3)/3 = \mathbf{0.67}$

Elongation? $S = l_1/l = 5/3 = \mathbf{1.67}$

Déformations

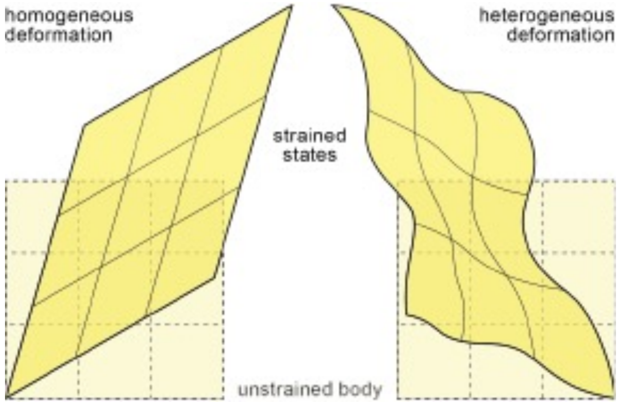
- **Forces «absorbées»**: déplacement de particules
- Le corps contraint (stress) change de forme
- **Déformation (strain)**: déformation non rigide du corps, ou changement de forme.




1
Granite
2
Gneiss

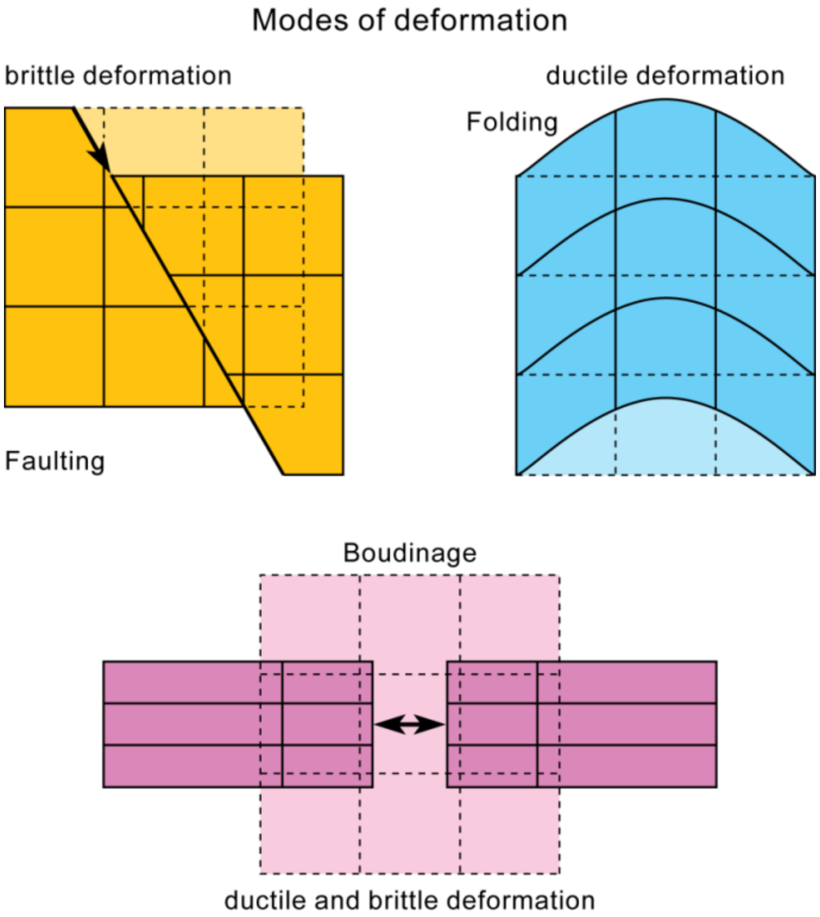
Déformations

- **Continue** (variation progressive de la transformation) ou **discontinue**
- **Homogène** (lignes initialement parallèles, le restant après la déformation) ou **hétérogène** (cas le plus fréquent)
- **Finie** (concerne la forme de l'objet final) ou **incrémentale**
- Déformation finie: pas d'unité (svt en %)

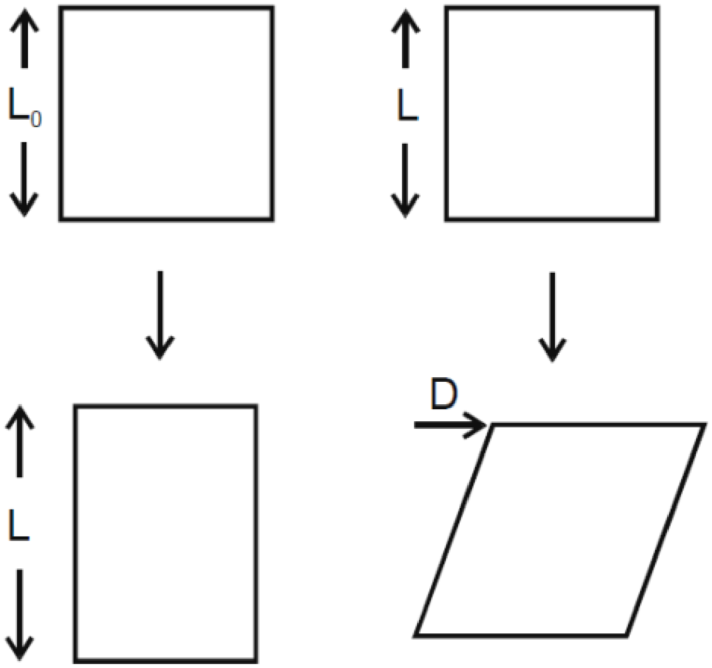


Mode de déformation

- 2 modes de déformations
  - **Fragile** (localisée, perte de cohésion)
  - **Ductile** (distribuée, sans perte de cohésion)



Mesure des déformations



strain, ε
$=(L-L_0)/L_0$

shear strain
$= D/L$

volumetric strain
$= (V-V_0)/V_0$

Cisaillement simple vs pure